© Усков В.И., 2021
DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-414-420
УДК 517.922

Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка относительно производной

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»
394613, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Аннотация. В статье рассматривается алгебро-дифференциальное уравнение второго порядка. Уравнениями и системами дифференциальных уравнений второго порядка описывается работа схемы электронного триода с обратной связью, вращение жесткого тела с полостью, считывание информации с диска и т. д. Перед старшей производной находится необратимый оператор. Этот оператор фредгольмов с нулевым индексом, обладающий ядром произвольной размерности и цепочками Жордана произвольной длины. Уравнения с необратимыми операторами при старшей производной называются алгебро-дифференциальными. В связи с этим решение задачи существует при определенных условиях на компоненты искомой функции. Для разрешения уравнения относительно производной применяется метод каскадной декомпозиции уравнения, заключающегося в пошаговом расщеплении уравнения на уравнения в подпространствах уменьшающихся размерностей. Рассмотрены случаи одношагового и двухшагового расщепления. При расщеплении используется результат о решении линейного уравнения с фредгольмовым оператором. В каждом случае получен результат, сформулированный в виде теоремы. Для иллюстрации полученного результата в случае одношагового расщепления приводится иллюстрирующий пример задачи Коши.

Ключевые слова: алгебро-дифференциальное уравнение второго порядка, банахово пространство, фредгольмов оператор, каскадная декомпозиция, задача Коши

Для цитирования: *Усков В.И.* Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка относительно производной // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 414–420. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-414-420.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-414-420

Solving a second-order algebro-differential equation with respect to the derivative

Vladimir I. USKOV

Voronezh State University of Forestry and Technologies after named G. F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394613, Russian Federation

Abstract. We consider a second-order algebro-differential equation. Equations and systems of second-order differential equations describe the operation of an electronic triode circuit with feedback, rotation of a rigid body with a cavity, reading information from a disk, etc. The highest derivative is preceded by an irreversible operator. This is a Fredholm operator with index zero, kernel of arbitrary dimension, and Jordan chains of arbitrary lengths. Equations with irreversible operators at the highest derivative are called algebro-differential. In this case, the solution to the problem exists under certain conditions on the components of the desired function. To solve the equation with respect to the derivative, the method of cascade splitting of the equation is used, which consists in the stepwise splitting of the equation into equations in subspaces of decreasing dimensions. Cases of one-step and two-step splitting are considered. The splitting uses the result on the solution of a linear equation with Fredholm operator. In each case, the corresponding result is formulated as a theorem. To illustrate the result obtained in the case of one-step splitting, an illustrative example of the Cauchy problem is given.

Keywords: second-order algebro-differential equation, Banach space, Fredholm operator, cascade splitting, Cauchy problem

Mathematics Subject Classification: 34A12.

For citation: Uskov V.I. Razresheniye algebro-differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka otnositel'no proizvodnoy [Solving a second-order algebro-differential equation with respect to the derivative]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 414–420. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-414-420. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Уравнениями и системами дифференциальных уравнений второго порядка описывается работа схемы электронного триода с обратной связью (уравнение Рэлея) [1], вращение жесткого тела с полостью (уравнение Ламе) [2], считывание информации с диска [3] и т. д.

Уравнения с вырожденным оператором при старшей производной называют алгебро-дифференциальными. Задача Коши решалась в работе [4], где этот оператор — нормально разрешимый фредгольмов с n-мерным ядром, имеющий относительно некоторой оператор-функции полный биканонический жорданов набор; в работе [5] операторные коэффициенты являются $n\times n$-матрицами, для краевой задачи применялся метод сеток. Используемый здесь метод каскадной декомпозиции применялся в работе [6] при исследовании возмущений, вызываемых наличием малого параметра у алгебро-дифференциального уравнения первого порядка.

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = Bu(t) + F(t), \tag{0.1}$$

где $A, B : E_1 \to E_2$ — замкнутые линейные операторы, E_1, E_2 — банаховы пространства, $\overline{\operatorname{dom} A} = E_1$, $\overline{\operatorname{dom} B} = E_1$; A — фредгольмов оператор с нулевым индексом; $F(t)$ — заданная функция со значениями в E_2.

Здесь оператор A имеет более сложную структуру — каждый элемент ядра имеет присоединенные элементы различной длины.

Фредгольмов оператор A вполне определяется следующими свойствами.

Свойство A (см. [7]).

$$E_1 = \operatorname{Coim} A \oplus \operatorname{Ker} A, \quad E_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A,$$

где $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к $\operatorname{Ker} A$ в E_1, $\operatorname{Coker} A$ — дефектное подпространство, $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A < \infty$. Сужение $\tilde{A}$ имеет ограниченный обратный $\tilde{A}^{-1}$.

Обозначим через $Q(A)$ проектор на $\operatorname{Coker} A$, $P(A)$ — проектор на $\operatorname{Ker} A$ и через I — единичный оператор в соответствующем подпространстве. Введем полуобратный оператор $A^- = \tilde{A}^{-1}(I - Q(A))$.

Свойство B (см. [8]). Равенство $Av = w$, $v \in E_1 \cap \operatorname{dom} A$, $w \in E_2$, равносильно системе

$$\begin{aligned}
&v = A^- w + Pv \quad \text{для всех} \quad Pv \in \operatorname{Ker} A,\\
&Qw = 0.
\end{aligned}$$

В дальнейшем используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&A_0 = A, \quad Q_i = Q(A_i), \quad P_i = P(A_i), \quad i = 0,1,2,\\
&A_i = S_{i-1}P_{i-1}, \quad A_i^- = \tilde{A}_i^{-1}(I - Q_i), \quad i = 1,2,\\
&T_0 = A_0^- B, \quad S_0 = Q_0 B, \quad K_0 = Q_0, \quad L_0 = A_0^-, \quad R_0 = S_0T_0, \quad G_0 = S_0L_0 + \frac{d^2}{dt^2}K_0,\\
&T_1 = T_0 - A_1^- R_0, \quad S_1 = Q_1A_1^- R_0, \quad L_1 = L_0 - A_1^- G_0, \quad K_1 = Q_1A_1^- G_0.
\end{aligned} \tag{0.2}$$

Цель работы: разрешить уравнение (0.1) относительно производной, для чего применяется метод каскадного расщепления уравнения на уравнения в подпространствах уменьшающихся размерностей. Рассматривается случай обратимости оператора A_1 (один шаг расщепления) и случай обратимости оператора A_2 (два шага расщепления, A_1 в этом случае полагается необратимым).

Приводится иллюстрирующий пример задачи Коши.

1. Случай обратимости оператора A_1

В силу свойства B из работы [8] уравнение (0.1) равносильно системе

$$\frac{d^2u}{dt^2} = T_0 u + L_0 F(t) + P_0 \frac{d^2u}{dt^2}, \tag{1.1}$$

$$S_0 u(t) + K_0 F(t) = 0 \tag{1.2}$$

с искомым элементом $P_0 \dfrac{d^2u}{dt^2} \in \operatorname{Ker} A_0$.

Пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 1.1. Функция $K_0 F(t)$ дважды дифференцируема.

Дифференцирование дважды равенства (1.2) и подстановка в него выражения (1.1) приводит к уравнению

$$A_1 (P_0 \frac{d^2u}{dt^2}) = -R_0 u(t) - G_0 F(t). \tag{1.3}$$

Теперь пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 1.2. Оператор $A_1 : \operatorname{Ker} A_0 \to \operatorname{Coker} A_0$ обратим.

Тогда обращение уравнения (1.3) и подстановка в (1.1) влекут уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} = T_1 u + L_1 F(t). \tag{1.4}$$

Тем самым, получено следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия 1.1, 1.2. Тогда уравнение* (0.1) *равносильно системе* (1.4), (1.2) *в обозначениях* (0.2).

2. Случай обратимости оператора A_2

Теперь пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 2.3. Оператор A_1 фредгольмов с нулевым индексом.

З а м е ч а н и е 2.1. Теперь имеют место следующие разложения в прямые суммы:

$$\operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} A_1 \oplus \operatorname{Coim} A_1, \quad \operatorname{Coker} A_0 = \operatorname{Im} A_1 \oplus \operatorname{Coker} A_1.$$

Сделаем второй шаг расщепления уравнения (0.1). Применением свойства B уравнение (1.3) сводится к равносильной системе

$$P_0 \frac{d^2u}{dt^2} = -A_1^- R_0 u(t) - A_1^- G_0 F(t) + P_1 P_0 \frac{d^2u}{dt^2}, \tag{2.1}$$

$$S_1 u(t) + K_1 F(t) = 0 \tag{2.2}$$

с искомым элементом $P_1 P_0 \dfrac{d^2u}{dt^2} \in \operatorname{Ker} A_1$.

Наложим следующее условие.

У с л о в и е 2.4. Функция $K_1F(t)$ дважды дифференцируема.

Аналогично, продифференцировав равенство (2.2) и подставив в него последовательно выражения (1.1), (2.1), получим уравнение

$$A_2(P_1P_0\frac{d^2u}{dt^2}) = -S_1(T_0 - A_1^-R_0)u(t) - S_1(L_0F(t) - A_1^-G_0F(t)) - \frac{d^2}{dt^2}K_1F(t). \tag{2.3}$$

Теперь пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 2.5. Оператор $A_2 : \operatorname{Ker} A_1 \to \operatorname{Coker} A_1$ обратим.

Выразив элемент $P_1P_0\dfrac{d^2u}{dt^2}$ из (2.3), подставив его в (2.1), а затем — в (1.1), приходим к уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} = T_2u + L_2F(t). \tag{2.4}$$

Тем самым, получено следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия 2.3, 2.4, 2.5. Тогда уравнение* (0.1) *равносильно системе* (2.4), (1.2), (2.2) *в обозначениях* (0.2).

3. Вспомогательное утверждение

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Du(t), \tag{3.1}$$

где D – замкнутый линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E; $\overline{\operatorname{dom} D} = E$.

Под решением уравнения подразумевается дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая (3.1).

Имеет место следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Пусть число $\lambda \in \mathbb{C}$ и вектор h таковы, что*

$$(D - \lambda^2 I)h = 0 \ \Rightarrow \ h \neq 0.$$

Тогда функция

$$u(t) = \exp(\lambda t)h \tag{3.2}$$

является частным решением уравнения (3.1).

Это утверждение доказывается подстановкой функции (3.2) в уравнение (3.1).

4. Пример

Рассмотрим задачу Коши на $\mathfrak{T} = [0; t_k]$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{d^2u_3}{dt^2} = u_1(t) + 2u_2(t) + 3u_3(t),\\
&2\frac{d^2u_1}{dt^2} + 2\frac{d^2u_2}{dt^2} + 2\frac{d^2u_3}{dt^2} = u_1(t) + 3u_2(t) + 2u_3(t),\\
&3\frac{d^2u_1}{dt^2} + 3\frac{d^2u_2}{dt^2} + 3\frac{d^2u_3}{dt^2} = 2u_1(t) + 3u_2(t) + u_3(t),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$u_1(0) = a_1, \quad u_2(0) = a_2, \quad u_3(0) = a_3, \tag{4.2}$$

$$u_1'(0) = b_1, \quad u_2'(0) = b_2, \quad u_3'(0) = b_3, \tag{4.3}$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — заданные скаляры из $\mathbb{R}$.

Здесь $A, B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ — искомая функция, $u^0 := u(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $u^1 := u'(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ — начальные векторы, $F(t) \equiv 0$.

Для оператора A имеем:

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \operatorname{Coim} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \right\},$$

$$\operatorname{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma \\ 2\gamma \\ 3\gamma \end{pmatrix} \right\}, \quad \operatorname{Coker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Coim} A = \{0\}$, $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Coker} A = \{0\}$, отображение $\operatorname{Coim} A$ в $\operatorname{Im} A$ взаимно однозначно, P, Q идемпотентны.

Из уравнения $A(Pv) = Qw$, где $Pv \in \operatorname{Ker} A$, $Qw \in \operatorname{Coker} A$, следует, что оператор $A_1 = QBP$ обратим в $\operatorname{Ker} A$ и

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/6 & 1/2 \\ 0 & 7/6 & -1/2 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь задачу Коши (4.1), (4.2), (4.3). В силу непрерывной зависимости от начальных условий требуется наложить условия согласования, вытекающие из (1.2) и продифференцированного выражения:

$$S_0 u^0 + S_0 F(0) = 0, \quad S_0 u^1 + S_0 F'(0) = 0,$$

то есть

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + 4a_3 = 0, \quad a_1 + 3a_2 + 8a_3 = 0, \\ b_1 + b_2 + 4b_3 = 0, \quad b_1 + 3b_2 + 8b_3 = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Вычисления с применением теоремы 1.1, предложения 3.1 и (4.4) приводят к искомому решению

$$u(t) = (a_3 \operatorname{ch} t + b_3 \operatorname{sh} t) \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

References

[1] Дж. Стокер, *Нелинейные колебания в механических и электрических схемах.* Т. 2, Чистая и прикладная математика, Издательство иностранной литературы, М., 1952, 273 с.; англ. пер.:J. Stoker, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems.* V. II, Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers, Geneva, 1957, 273 pp.

[2] Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан, *Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи*, Наука, М., 1989. [N. D. Kopachevskiy, S. G. Kreyn, Ngo Zuy Kan, *Operator Methods in Linear Hydrodynamics. Evolutionary and Spectral Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russian)].

[3] R. C. Dorf, R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, Marquette University Faculty, USA, 1998.

[4] С. С. Орлов, "Непрерывные решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах", *Известия Иркутского государственного университета*, **2**:1 (2009), 328–332. [S. S. Orlov, "Continuous solutions of a degenerate integro-differential equation in Banach spaces", *Izvestiya of Irkutsk State University*, **2**:1 (2009), 328–332 (In Russian)].

[5] М. Н. Ботороева, О. С. Будникова, Л. С. Соловарова, "О выборе краевых условий для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка", *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*, 2019, №3, 32–41. [M. N. Botoroeva, O. S. Budnikova, L. S. Solovarova, "On the choice of boundary conditions for differential-algebraic equations of the second order", *Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Computer Science*, 2019, №3, 32–41 (In Russian)].

[6] В. И. Усков, "Исследование жесткости алгебро-дифференциальной системы первого порядка с возмущением в правой части", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 172–181. [V. I. Uskov, "Study of rigidity of a first-order differential system with perturbation in the right-hand side", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 172–181 (In Russian)].

[7] С. М. Никольский, "Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **7**:3 (1943), 147–166. [S. Nikolsky, "Linear equations in normed linear spaces", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **7**:3 (1943), 147–166 (In Russian)].

[8] С. П. Зубова, В. И. Усков, "Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай", *Математические заметки*, **103**:3 (2018), 392–403; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, "Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case", *Mathematical Notes*, **103**:3 (2018), 395–404.

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Поступила в редакцию 17.08.2021 г.
Поступила после рецензирования 30.10.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematics Department. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Received 17.08.2021
Reviewed 30.10.2021
Accepted for press 27.11.2021